DM n°6 : Polynômes de Tchebychev

On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}\left[X\right]$ par :

$$P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

1) Calculer P_2, P_3, P_4.
2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3) Montrer que P_n a la même parité que l'entier n.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

5) En déduire une expression simple de $P_n(\cos\theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
6) Montrer que P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{C}\left[X\right]$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

7) Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
8) En déduire toutes les racines de P_n, puis donner une factorisation de P_n.
9) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$.
10) Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} X^{n-2p}(X^2-1)^p$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : \left[-1,1\right] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

   (a) Calculer f_0, f_1 et f_2.
   (b) Exprimer $f_{n+1} + f_{n-1}$ en fonction de f_n.
   (c) Pour tout $x \in \left[-1,1\right]$, exprimer $f_n(x)$ comme un polynôme en x.